Ex.23　解: 先计算齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0 \end{cases} \tag{1}$$

的解. 对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{pmatrix}.$$

因为$a^2-3a+2=(a-1)(a-2)$, 所以, 当$a\neq 1,2$ 时, 齐次线性方程组(1) 只有零解, 此时, 0 显然不是方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 的解.

当$a=1$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组(1) 有基础解系

$$\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

通解为$c\xi$, c 为任意常数. 容易验证$c\xi$ 也是方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 的解. 所以, $a=1$ 时有公共解

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中, c 为任意常数.

当$a=2$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

齐次线性方程组(1) 有基础解系

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

通解为$c\eta$, c 为任意常数. 将$a=2$ 和$c\eta$ 代人方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$ 得

$$-2c+c=1 \Rightarrow c=-1.$$

所以, $a=2$ 时有公共解

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$